

CBSE QUESTION PAPER

MATHEMATICS

गणित

Class-XII

Time allowed : 3 hours

निर्धारित समय : 3 घण्टे

Maximum Marks: 100

अधिकतम अंक : 100

सामान्य निर्देश :

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
- (ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स ।
खण्ड अ में 10 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है । खण्ड ब में 12 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है । खण्ड स में 7 प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है ।
- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।
- (iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प हैं । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है ।

General Instructions :

- (i) All questions are compulsory.
- (ii) The question paper consists of 29 questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of 10 questions of one mark each, Section B comprises of 12 questions of four marks each and Section C comprises of 7 questions of six marks each.
- (iii) All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.
- (iv) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.
- (v) Use of calculators is not permitted.

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

Question numbers 1 to 10 carry 1 mark each.

1. माना A , 3×3 कोटि का एक वर्ग आव्यूह है। $|2A|$ का मान लिखिए, जहाँ $|A| = 4$ है।
Let A be a square matrix of order 3×3 . Write the value of $|2A|$, where $|A| = 4$.

2. यदि $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो $A^T - B^T$ ज्ञात कीजिए।

If $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, then find $A^T - B^T$.

3. दिया गया है कि $\int e^x (\tan x + 1) \sec x \, dx = e^x f(x) + c$ है।
तो वह $f(x)$ लिखिए जो उपर्युक्त को संतुष्ट करता है।

Given $\int e^x (\tan x + 1) \sec x \, dx = e^x f(x) + c$.

Write $f(x)$ satisfying the above.

4. $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

Find the principal value of $\tan^{-1} \sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$.

द्विआधारी संक्रिया $*$: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $a * b = 2a + b$ द्वारा परिभाषित है। $(2 * 3) * 4$ ज्ञात कीजिए।

The binary operation $*$: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ is defined as $a * b = 2a + b$. Find $(2 * 3) * 4$.

6. मूल बिन्दु से समतल $3x - 4y + 12z = 3$ की दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the distance of the plane $3x - 4y + 12z = 3$ from the origin.

7. सदिश \vec{AB} , जिसका प्रारंभिक बिन्दु $A(2, 1)$ तथा अन्तिम बिन्दु $B(-5, 7)$ है, के अदिश घटक ज्ञात कीजिए ।

Find the scalar components of the vector AB with initial point $A(2, 1)$ and terminal point $B(-5, 7)$.

8. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2} \, dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - x^2} \, dx$$

9. निम्नलिखित समीकरण से $y - x$ का मान ज्ञात कीजिए

$$2 \begin{pmatrix} x & 5 \\ 7 & y - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$$

Find the value of $y - x$ from the following equation

$$2 \begin{pmatrix} x & 5 \\ 7 & y - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$$

10. $(\hat{k} \times \hat{j}) \cdot \hat{i} + \hat{j} \cdot \hat{k}$ का मान लिखिए ।

Write the value of $(\hat{k} \times \hat{j}) \cdot \hat{i} + \hat{j} \cdot \hat{k}$.

खण्ड ब
SECTION B

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Question numbers 11 to 22 carry 4 marks each.

11. यदि $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$, $y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$
अथवा

$\tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \right]$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

If $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}}$, $y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, show that $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

OR

Differentiate $\tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \right]$ with respect to x .

12. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी गई गड्डी में से दो पत्ते उन्नीसतर (बिना प्रतिस्थापना के) निकाले जाते हैं। लाल रंग के पत्तों की संख्या का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए।

Two cards are drawn simultaneously (without replacement) from a well-shuffled pack of 52 cards. Find the mean and variance of the number of red cards.

13. माना $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ हैं। एक सदिश \vec{p} ज्ञात कीजिए जो \vec{a} तथा \vec{b} दोनों पर लम्ब है तथा $\vec{p} \cdot \vec{c} = 18$ है।

Let $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ and $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$. Find a vector \vec{p} which is perpendicular to both \vec{a} and \vec{b} and $\vec{p} \cdot \vec{c} = 18$.

14. द्वितीय चतुर्थांश में ऐसे वृत्तों के कुल का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षों को स्पर्श करते हैं।

अथवा

अवकल समीकरण $x(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} = 1$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए जब $x = 2$ है, तो $y = 0$ है।

Form the differential equation of the family of circles in the second quadrant and touching the coordinate axes.

Ok

Find the particular solution of the differential equation

$$x(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} = 1; y = 0 \text{ when } x = 2.$$

15. दर्शाइए कि $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, जो निम्न द्वारा प्रदत्त है,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{यदि } x \text{ विषम है} \\ x-1, & \text{यदि } x \text{ सम है} \end{cases}$$

एकैकी तथा आच्छादक दोनों है

अथवा

द्विआधारी संक्रियाओं $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ तथा \circ : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, जो $a * b = |a - b|$ तथा $a \circ b = a$, सभी $a, b \in \mathbb{R}$ के लिए, द्वारा परिभाषित हैं, पर विचार कीजिए। दर्शाइए कि ' $*$ ' क्रमविनिमेय है परन्तु साहचर्य नहीं है, ' \circ ' साहचर्य है परन्तु क्रमविनिमेय नहीं है।

Show that $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, given by

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{if } x \text{ is odd} \\ x-1, & \text{if } x \text{ is even} \end{cases}$$

is both one-one and onto.

OR

Consider the binary operations $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and \circ : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined as $a * b = |a - b|$ and $a \circ b = a$ for all $a, b \in \mathbb{R}$. Show that ' $*$ ' is commutative but not associative, ' \circ ' is associative but not commutative.

16. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-1}^2 |x^3 - x| dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

Evaluate

$$\int_{-1}^2 |x^3 - x| dx$$

OR

Evaluate

$$\int \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

17. एक 5 मी. लंबी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है। सीढ़ी का नीचे का सिरा, पृथ्वी के अनुरादिश, दीवार से दूर 2 सेमी/से. की दर से खींचा जाता है। दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4 मी. दूर है ?

A ladder 5 m long is leaning against a wall. The bottom of the ladder is pulled along the ground, away from the wall, at the rate of 2 cm/s. How fast is its height on the wall decreasing when the foot of the ladder is 4 m away from the wall ?

18. सरणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$

Using properties of determinants, show that

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$

19. निम्न को सिद्ध कीजिए :

$$\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$$

Prove the following :

$$\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$$

20. यदि $y = (\tan^{-1} x)^2$ है, तो दर्शाइए कि $(x^2 + 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = 2$.

If $y = (\tan^{-1} x)^2$, show that $(x^2 + 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = 2$.

21. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x$, ($x \neq 0$) का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि जब $x = \frac{\pi}{2}$ तो $y = 0$ है।

Find the particular solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x, (x \neq 0), \text{ given that } y = 0 \text{ when } x = \frac{\pi}{2}.$$

22. इस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दुओं $(3, -4, -5)$ तथा $(2, -3, 1)$ से गुजरने वाली रेखा, समतल $2x + y + z = 7$ को काटती है।

Find the coordinates of the point where the line through the points $(3, -4, -5)$ and $(2, -3, 1)$ crosses the plane $2x + y + z = 7$.

खण्ड स
SECTION C

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है ।
Question numbers 23 to 29 carry 6 marks each.

23. सिद्ध कीजिए कि एक दिए गए शंकु के अन्तर्गत महत्तम वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल वाले लंब-वृत्तीय बेलन की त्रिज्या, शंकु की त्रिज्या की आधी होती है ।

अथवा

दिए गए c^2 वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाले एक गते में से ऊपर से खुला एक बक्सा जिसका आधार वर्गाकार है, बनाया जाता है । दर्शाइए कि बक्से का अधिकतम आयतन $\frac{c^3}{6\sqrt{3}}$ घन इकाई है ।

Prove that the radius of the right circular cylinder of greatest curved surface area which can be inscribed in a given cone is half of that of the cone.

OR

An open box with a square base is to be made out of a given quantity of cardboard of area c^2 square units. Show that the maximum volume of the box is $\frac{c^3}{6\sqrt{3}}$ cubic units.

24. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2 (x+3)} dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

OR

Evaluate

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2 (x+3)} dx$$

25. $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 2\}$ द्वारा प्रदत्त क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Find the area of the region $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 2\}$.

26. माना एक लड़की एक पासा उछालती है । यदि उसे 5 या 6 की संख्या प्राप्त होती है, तो वह एक सिक्के को तीन बार उछालती है और चितों की संख्या नोट करती है । यदि उसे 1, 2, 3 या 4 की संख्या प्राप्त होती है, तो वह एक सिक्के को एक बार उछालती है और यह नोट करती है कि उसे चित या पट प्राप्त हुआ । यदि उसे ठीक एक चित प्राप्त होता है, तो उसके द्वारा उछाले गए पासे पर 1, 2, 3 या 4 प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है ?

Suppose a girl throws a die. If she gets a 5 or 6, she tosses a coin 3 times and notes the number of heads. If she gets 1, 2, 3 or 4 she tosses a coin once and notes whether a head or tail is obtained. If she obtained exactly one head, what is the probability that she threw 1, 2, 3 or 4 with the die ?

27. एक आहार-विज्ञानी दो प्रकार के भोज्यों को इस प्रकार मिलाना चाहता है कि मिश्रण में विटामिन A का घटक कम-से-कम 8 मात्रक और विटामिन C का घटक कम-से-कम 10 मात्रक हो । भोज्य I में 2 मात्रक विटामिन A प्रति किया और 1 मात्रक विटामिन C प्रति किया है जबकि भोज्य II में 1 मात्रक विटामिन A प्रति किया और 2 मात्रक विटामिन C प्रति किया है । प्रति किया भोज्य I को खरीदने में ₹ 5 तथा प्रति किया भोज्य II को खरीदने में ₹ 7 लगते हैं । उपर्युक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ़ द्वारा हल करके प्रति किया मिश्रण का न्यूनतम मूल्य ज्ञात कीजिए ।

A dietician wishes to mix two types of foods in such a way that the vitamin contents of the mixture contains at least 8 units of vitamin A and 10 units of vitamin C. Food I contains 2 units/kg of vitamin A and 1 unit/kg of vitamin C while Food II contains 1 unit/kg of vitamin A and 2 units/kg of vitamin C. It costs ₹ 5 per kg to purchase Food I and ₹ 7 per kg to purchase Food II. Determine the minimum cost of such a mixture. Formulate the above as a LPP and solve it graphically.

28. आव्यूहों का प्रयोग करके, निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + y - z = 3; \quad 2x + 3y + z = 10; \quad 3x - y - 7z = 1$$

Using matrices, solve the following system of equations :

$$x + y - z = 3; \quad 2x + 3y + z = 10; \quad 3x - y - 7z = 1$$

29. बिन्दु $P(7, 14, 5)$ से समतल $2x + 4y - z = 2$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई तथा पाद ज्ञात कीजिए । बिन्दु P का दिए गए समतल में प्रतिबिम्ब भी ज्ञात कीजिए ।

Find the length and the foot of the perpendicular from the point $P(7, 14, 5)$ to the plane $2x + 4y - z = 2$. Also find the image of point P in the plane.

9apaper.com